МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Каландаров Азиз Абдукаюмович, проректор по учебной работе ГГПИ,
доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам, доцент
e-mail: abrorshox@mail.ru

Аннотация. В статье предложена математическая модель термоупругости, сформулированная как динамическая связанная задача в напряжениях. Разработаны явные и неявные конечно-разностные соотношения, которые дают возможность вычислить численные решения рассматриваемой задачи. В качестве примера численно решена одномерная связанная динамическая задача для изотропных тел, с использованием явных и неявных конечно-разностных схем.

Ключевые слова: термоупругость, напряжения, деформации, явная схема, неявная схема, сходимость.

TERMOELASTIK JARAYONLARNI KUCHLANISHLARDA IFODALANGAN BOG‘LIQ DINAMIK MASALALAR ASOSIDA MATEMATIK VA SONLI MODELLASHTIRISH

Annotatsiya. Maqolada termoelastiklikning kuchlanishlarda ifodalangan dinamik bog‘liq masala ko‘rinishidagi matematik modeli taklif qilingan. Qaralayotgan masalaning sonli yechimlarini hisoblash imkonini beruvchi oshkor va oshkormas chekli ayirmali sxemalar ishlab chiqilgan. Misol sifatida bir o‘lchovli termoelastik dinamik bog‘liq masala oshkor va oshkormas chekli ayirmali sxemalar yordamida sonli yechilgan.

Kalit so‘zlar: termoelastiklik, kuchlanishlar, deformatsiyalar, oshkor sxema, oshkormas sxema, yaqinlashish.

MATHEMATICAL AND NUMERICAL MODELING OF THERMOELASTIC PROCESSES BASED ON DYNAMIC COUPLED PROBLEMS IN STRESSES

Abstract. The article proposes a mathematical model of thermoelasticity formulated as a dynamic coupled problem in stresses. Explicit and implicit finite-difference relations are developed, which make it possible to calculate the numerical solutions of the problem under consideration. As an example, a one-dimensional

coupled dynamic problem for isotropic bodies is numerically solved using explicit and implicit finite-difference schemes.

Keywords: thermoelasticity, stresses, strains, explicit scheme, implicit scheme, convergence.

Введение. Математическое и компьютерное моделирование термоупругих и термопластических процессов является актуальной проблемой математического и компьютерного моделирования. При математической постановке термо-упруго-пластических задач используются связанные и несвязанные краевые задачи [3, 7, 8].

В общем случае, связанная динамическая краевая задача термоупругости состоит из уравнения движения, соотношения между напряжениями и деформациями с учетом температуры, соотношения между деформациями и перемещениями, уравнения притока тепла и с соответствующими начальными и краевыми условиями. Если внешние факторы, вызывающие движение тела изменяются во времени очень медленно, то в уравнении движения можно пренебречь инерционными членами, в этом случае имеем квазистатическую задачу. Если величины, вызывающие деформацию и температуру, изменяются достаточно медленно от нуля до своих конечных значений и остаются в таком состоянии, то мы получим статическую задачу. В этом случае имеем несвязанную задачу термоупругости. Все вышеизложенные задачи термоупругости и термопластичности обычно решаются в перемещениях [1, 2, 4-6]. Если начальные и краевые условия заданы в напряжениях, задачу надо сформулировать в напряжениях. В этом случаи придётся добавить уравнения Бельтрами-Митчелла. В предложенной математической модели связанной динамической задачи термоупругости мы избежали использования уравнений Бельтрами-Митчелла.

Предложенный численный метод решения термоупругих краевых задач и полученные результаты могут быть использованны при численном моделировании и определении запасов прочности и надежности современных технических объектов и сооружений из композиционных материалов, инаходящихся под действием тепломеханических воздействий.

Постановка задачи. Рассмотрим математическую модель связанной задачи термоупругости в напряжениях для изотропных тел, которая состоит из уравнений движения

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \tag{1}$$

соотношения Дюгамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \gamma (T - T_0)\delta_{ij} \tag{2}$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{3}$$

уравнения притока тепла для изотропных тел

$$\lambda_0 T_{,ii} - c_\varepsilon \dot{T} - \gamma T \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \qquad (4)$$

и соответствующих начальных и краевых условий.

Где σ_{ij} – тензор напряжений, ε_{ij} – тензор деформаций, u_i – перемещения, θ – шаровая часть тензора деформаций, λ, μ – упругие постоянные Ламе, X_i – объемная сила, δ_{ij} – символ Кронекера, c_ε – теплоемкость при постоянной деформации, ρ – плотность тела, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, α – коэффициент теплового расширения, λ_0 – коэффициент теплопроводности.

Уравнения (1-4) в одномерном случае имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} + X = \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \sigma = (\lambda + 2\mu)\varepsilon - \gamma(T - T_0) \\ \varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \lambda_0 \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - c_\varepsilon \dfrac{\partial T}{\partial t} - \gamma T \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Если начальные и краевые условия заданы в перемещениях и температуре [3], задача формулируется в перемещениях, но в нашем случае начальные и краевые условия заданы в напряжениях и температуре. После некоторых преобразований систему (5) можно привести к следующему виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho} \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \gamma \dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda_0}{k} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\beta}{k} \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} \end{cases} \qquad (6)$$

где

$$k = c_\varepsilon + \frac{\gamma^2 T_0}{\lambda + 2\mu}, \qquad \beta = \frac{\gamma T_0}{\lambda + 2\mu}.$$

Систему уравнений (6) рассмотрим с соответствующими начальными

$$\sigma(x,t)\big|_{t=0} = \phi, \qquad \left.\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi, \quad T(x,t)\big|_{t=0} = T_0 \qquad (7)$$

и краевыми условиями

$$\sigma(x,t)\big|_{x=0} = \sigma_0; \;\; \sigma(x,t)\big|_{x=\ell} = \overline{\sigma}_0; \;\; T(x,t)\big|_{x=0} = T_1(t), \;\; T(x,t)\big|_{x=\ell} = T_2(t). \qquad (8)$$

Как видно в системе (6) неизвестными являются напряжения и температура, в первом уравнении температура влияет на напряжение, во втором уравнении напряжение влияет на температуру. Система (6) с соответствующими начальными (7) и краевыми (8) условиями составляют связанную динамическую краевую задачу термоупругости в напряжениях.

Численная реализация. При численной реализации можно использовать явные или неявные конечно разностные уравнения. Рассмотрим явную схему, заменяя в уравнениях (6) производные конечно-разностными соотношениями, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_i^{j+1}-2\sigma_i^j+\sigma_i^{j-1}}{\tau^2}=\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}\dfrac{\sigma_{i+1}^j-2\sigma_i^j+\sigma_{i-1}^j}{h^2}-\gamma\dfrac{T_i^{j+1}-2T_i^j+T_i^{j-1}}{\tau^2} \\ \dfrac{T_i^{j+1}-T_i^j}{\tau}=\dfrac{\lambda_0}{k}\dfrac{T_{i+1}^j-2T_i^j+T_{i-1}^j}{h^2}+\dfrac{\beta}{k}\dfrac{\sigma_i^j-\sigma_i^{j-1}}{\tau} \end{cases} \tag{9}$$

Решим разностные уравнения (9) относительно σ_i^{j+1} и T_i^{j+1} соответственно, получим

$$\begin{cases} \sigma_i^{j+1}=\dfrac{\tau^2(\lambda+2\mu)}{\rho h^2}(\sigma_{i+1}^j-2\sigma_i^j+\sigma_{i-1}^j)-\gamma(T_i^{j+1}-2T_i^j+T_i^{j-1})+2\sigma_i^j-\sigma_i^{j-1} \\ T_i^{j+1}=\dfrac{\tau\lambda_0}{kh^2}(T_{i+1}^j-2T_i^j+T_{i-1}^j)+\dfrac{\beta}{k}(\sigma_i^j-\sigma_i^{j-1})+T_i^j \end{cases} \tag{10}$$

Разностные уравнения (10) с использованием начальных и краевых условий (7)-(8) дают возможность вычислить значения искомых функций на *(j+1)* слое по времени.

При использовании явных конечно-разностных схем нужно иметь в виду ограничения шага по времени.

Далее рассмотрим неявные конечно-разностные уравнения.

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_i^{j+1}-2\sigma_i^j+\sigma_i^{j-1}}{\tau^2}=\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}\dfrac{\sigma_{i+1}^{j+1}-2\sigma_i^{j+1}+\sigma_{i-1}^{j+1}}{h^2}-\gamma\dfrac{T_i^{j+1}-2T_i^j+T_i^{j-1}}{\tau^2} \\ \dfrac{T_i^{j+1}-T_i^j}{\tau}=\dfrac{\lambda_0}{k}\dfrac{T_{i+1}^{j+1}-2T_i^{j+1}+T_{i-1}^{j+1}}{h^2}+\dfrac{\beta}{k}\dfrac{\sigma_i^j-\sigma_i^{j-1}}{\tau} \end{cases} \tag{11}$$

Первое уравнение системы (11) можно привести к следующему трёхдиагональному виду:

$$a_i\sigma_{i+1}^{j+1}+b_i\sigma_i^{j+1}+c_i\sigma_{i-1}^{j+1}=f_i \tag{12}$$

где

$$a_i=\frac{\lambda+2\mu}{\rho h^2}\ ,\qquad b_i=-\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho h^2}-\frac{1}{\tau^2}\ ,\quad c_i=\frac{\lambda+2\mu}{\rho h^2}$$

$$f_i=\gamma\frac{T_i^{j+1}-2T_i^j+T_i^{j-1}}{\tau^2}-\frac{2\sigma_i^j-\sigma_i^{j-1}}{\tau^2}\ .$$

Аналогичным образом можно привести и второе уравнение системы (11) к трёхдиагональному виду:

$$a_i^1 T_{i+1}^{j+1} + b_i^1 T_i^{j+1} + c_i^1 T_{i-1}^{j+1} = f_i^1 \qquad (13)$$

где

$$a_i^1 = \frac{\lambda_0}{kh^2}, \qquad b_i^1 = -\frac{\lambda_0}{kh^2} - \frac{1}{\tau}, \qquad c_i^1 = \frac{\lambda_0}{kh^2}$$

$$f_i^1 = -\frac{1}{\tau} T_i^j - \frac{\beta}{k} \frac{\sigma_i^j - \sigma_i^{j-1}}{\tau}.$$

Определив значения искомых функций $\sigma(x,t)$ на $j=0$ и $j=1$ начальных слоях и $T(x,t)$ на слое $j=0$ из начальных условий, далее, пользуясь граничными условиями, решаем уравнения (12) и (13) методом прогонки или итерационным методом.

Заключение. В данной статье рассмотрена математическая модель связанной динамической краевой задачи термоупругости относительно напряжений в одномерном случае. Нами разработан алгоритм и программные средства для численного решения связанных задач термоупругости на основе явных и неявных конечно-разностных уравнений. Предложенная математическая модель очень удобна при решении граничных задач, когда краевые условия заданы в напряжениях. Предложенный алгоритм решения может быть использован при численном решении термопластических краевых задач.

Список литературы:

1. Бородин П. Ю., Галанин М. П. Динамическая связанная задача термоупругости в различных пространственных приближениях. Математическое моделирование. Том 10. № 3. 1998. – С. 61-82. AIP Conference Proceedings 2637, 030005. – Samarkand, 2021. https://doi.org/10.1063/5.0118482.

2. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: МГУ, 1996. – 343 с.

3. Халджигитов А. А., Каландаров А. А., Юсупов Ю. С. Связанные задачи термоупругости и термопластичности. – Ташкент: Fan va texnologiya, 2019. – 204 с.

4. Tauchert T. R. Publications on Thermal Stresses. // J. Therm. Stress. 2001. Vol. 24. № 1. – P. 91-92.

5. Qalandarov A. A., Khaldjigitov A. A. Mathematical and numerical modeling of the coupled dynamic thermoelastic problem for isotropic bodies. TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 11. N. 1. 2020. – P. 119-126.

6. Khaldjigitov A. A., Kalandarov A. A., Djumayozov U. Z. Numerical modeling of coupled problems of thermo-plasticity on non-uniform meshes // 2nd International Conference on Energetics, Civil and Agricultural Engineering. AIP Conference Proceedings. 2686, 020010; – Tashkent, 2022. https://doi.org/10.1063/5.0114013.

7. Khaldjigitov A. A., Kalandarov A. A., Djumayozov U. Z. // Finite-Difference Equations for 2D Elasticity Problems on a Non-Uniform Grid // International Conference on Actual Problems of Applied Mechanics APAM.

8. Youssef H. M., Al-Felali A. S. Generalized Thermoelasticity Problem of Material Subjected to Thermal Loading Due to Laser Pulse. Applied Mathematics. N 3. 2012. – P. 142-146.